

ノルム空間 V から ノルム空間 W への有界線形作用素全体の集合 $B(V, W)$ に作用素ノルム $\| \cdot \|$ を入れ、特に、 W が Banach空間 の時、 $(B(V, W), \| \cdot \|)$ が Banach空間 になることを示した。次に、作用素ノルムの例題をいくつか扱い、最後に ノルム環 と Banach環 を定義した。

練習問題 1.6. V, W を \mathbb{K} 上の ノルム空間 とする。 $B(V, W)$ を定義域を V とする V から W への有界線形作用素全体の集合とするととき、

1. $B(V, W)$ は \mathbb{K} 上の線型空間になることを示せ。
2. 任意の $T \in B(V, W)$ とするとき、

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ \|T(v)\|_W \mid \|v\|_V \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|T(v)\|_W \mid \|v\|_V = 1 \} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0_V\} \right\} \end{aligned}$$

とおいたとき、 $\| \cdot \| : B(V, W) \rightarrow \mathbb{R}$ はノルムになることを示せ。このとき、 $\|T\|$ を有界線形作用素 T の作用素ノルムと言う。

3. 任意の $T \in B(V, W)$ に対して、

$$\|T(v)\|_W \leq \|T\| \|v\|_V \quad \text{for } \forall v \in V$$

となることを示せ。

定理 1.5. ノルム空間 $(B(V, W), \| \cdot \|)$ は、 $(W, \| \cdot \|_W)$ が Banach空間 ならば、Banach空間 になる。特に、 $V' = B(V, \mathbb{K})$ は Banach空間 である。

例題 1.1.

1. $V = W = L^p(\mathbb{R})$ $1 \leq p < \infty$ とする。任意の $h > 0$ に対して

$$(\tau_h f)(x) = f(x + h)$$

この時、 τ_h は $L^p(\mathbb{R})$ から $L^p(\mathbb{R})$ への有界線形作用素で、 $\|\tau_h\| = 1$ となることを示せ。

2. $V = L^2([\alpha, \beta])$ $W = L^1([\alpha, \beta])$ とするとき、

(a) V は W の線形部分空間になることを示せ。

(b) $j(u) = u$ として、 j は V の元を W の元と見なす作用素とするととき、 $j \in B(V, W)$ で、

$$\|j\| = (\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

となることを示せ。

⁴数学工房 <http://www.sugakukobo.com/>

1.3 Banach環

練習問題 1.7. V, W, Z をノルム空間とする。 $S \in B(V, W)$, $T \in B(W, Z)$ に対して

$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$$

が成立し、 $T \circ S \in B(V, Z)$ となることを示せ。

練習問題 1.8. V, W, Z をノルム空間とする。 $T, T_1, T_2 \in B(V, W)$, $S, S_1, S_2 \in B(W, Z)$ に対して次に計算規則が成り立つことを示せ。

1. $(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$
2. $S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$
3. $\alpha(S \circ T) = (\alpha S) \circ T = S \circ (\alpha T)$ for $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

定義 1.5 (ノルム環). $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ が \mathbb{K} 上の代数で、 $\|\cdot\|$ についてノルム空間とする。このとき、積について

$$\|a * b\| \leq \|a\| \|b\| \quad \text{for } \forall a, b \in \mathcal{A}$$

が成立するとき、 \mathcal{A} をノルム環と言う。

$(B(V), \|\cdot\|)$ はノルム環である。 V がBanach空間ならば、 $B(V)$ はBanach空間になるが、この時、 $B(V)$ はBanach環と呼ばれる。

記録 by J.S